正標数におけるFermat超曲面の完全交叉の単有理性(代数幾何学とホッジ理論)

島田, 伊知朗

数理解析研究所講究録
第 803 巻 1992 年 210-215

正標数における Fermat 超曲面の完全交叉の単有理性

北大. 理　　島田 伊知朗 (Ichiro Shimada)

1. Introduction.

標数 $p>0$ の代数閉体 k 上定義された $(q+1)$ 次 (q は p の巾) の Fermat 超曲面

$$V=\{X_0^{q+1}+X_1^{q+1}+\cdots+X_n^{q+1}=0\}\subset\mathbb{P}^n$$

は標数 0 上の多様体では決して見られない性質をいろいろと持つ。例をあげると

(i) 超特異性 (supersingularity) : $\dim V=n-1$ が偶数の場合、中間次元の cohomology 群は algebraic cycles の classes で span される。より詳しく、V に含まれる $(n-1)/2$ 次元の線形空間の classes で span されることがわかる ([T], [Sh], [Sh-K])。$\dim V$ が 3 以上の奇数の場合も、V に含まれる $(n-2)/2$ 次元の線形空間の族に付随した cylinder 写像

$$H^{n-1}(V,\mathbb{Q}_l)\to H^1(F,\mathbb{Q}_l(-(n-2)/2))$$

は単射になる。(ただし F は族を parametrize する 多様体。)

(ii) 単有理性 (unirationality) : n が 3 以上のとき、$\mathbb{P}^{n-1}$ から V への dominant な有理写像が存在する。もし $q+1\equiv 0 \mod m$ ならば、$(q+1)$ 次 Fermat 超曲面から m 次 Fermat 超曲面への全射が存在するので、m 次 Fermat 超曲面も単有理になる。
($\dim V=n-1$ が偶数の場合, [Sh], [Sh-K]。一般の場合 [Sch]。)

(iii) 超平面切断の moduli の constancy : V の非特異な超平面切断はすべて次元がひとつ低い $(q+1)$ 次 Fermat 超曲面と射影同型になる。逆に、$\mathbb{P}^n$ の非特異超曲面 (次数は 3 以上) でその非特異な超平面切断がすべてお互いに射影同型という性質をもつものは $(q+1)$ 次 Fermat 超曲面と射影同型になる。([B])

(iii) の前半は次の命題からただちにわかる。

Proposition. $\mathbb{P}^n$ の非特異超曲面が $(q+1)$ 次 *Fermat* 超曲面と射影同型になるための必要十分条件はその定義方程式が

$$\sum_{\mu,\nu=0}^{n} a_{\mu\nu}X_\mu {X_\nu}^q=0 \tag{1}$$

と書けることである。また (1) によって定義された超曲面が非特異になるための必要十分条件は

$$\det(a_{\mu\nu})\neq 0$$

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

である。

証明. 後半は容易。$\mathbf{X}=(X_0,\ldots,X_n)$, $A=(a_{\mu\nu})$ とおくと、(1) は $\mathbf{X}\cdot A\cdot {}^t\mathbf{X}^{(q)}=0$ と書ける。($\text{右肩の}(q)$ は各成分を q 乗して得られるベクトルをあらわす。) 一方、線形変換 $\mathbf{X}\mapsto\mathbf{X}\cdot B\quad(B\in GL(n+1,k))$ により $(q+1)$ 次 Fermat 超曲面は

$$\mathbf{X}\cdot(B\cdot {}^tB^{(q)})\cdot {}^t\mathbf{X}^{(q)}=0$$

なる式で定義される超曲面に移る。したがって、$B\mapsto B\cdot {}^tB^{(q)}$ なる写像が $GL(n+1,k)$ から自分自身への全射となることを言えばよい。これは Lang の定理からすぐにわかる。 □

この Proposition より、$(q+1)$ 次 Fermat 超曲面と射影同型になる超曲面全体は、ある線形系 $\mathcal{F}$ の open dense subset をなすことがわかる。そこで次のようなことが考えられる。

$\mathcal{F}$ の部分線形系の base locus として得られる完全交叉も $(q+1)$ 次 Fermat 超曲面と同様に正標数特有のおもしろい性質をもつのではなかろうか。

2. Main Theorems.

この考えのもとにつぎの定理を証明した。

Theorem 1. $V\subset\mathbb{P}^n$ を $(q+1)$ 次 *Fermat* 超曲面とする。$g_1,\ldots,g_r\in PGL(n+1,k)$ を *general* に選ぶ。もし $n\geq r^2+2r$ ならば、$\mathbb{P}^{n-r}$ から完全交叉

$$W=g_1(V)\cap\cdots\cap g_r(V)$$

への *purely inseparable of degree* $q^{r(r+1)/2}$ の *dominant rational map* が存在する。特に W は単有理である。

さらに、対角型の方程式により定義された超曲面の完全交叉に対して、

$$X_i\mapsto X_i^{(q+1)/m}\qquad(i=0,\ldots,n)$$

なる morphism をもちいて次の結果を証明した。

Theorem 2. $n\geq r^2+3r$ とする。$p^\nu\equiv -1 \mod m$ なる正整数 ν が存在するとする。このとき、r 個の対角型 m 次超曲面

$$\sum_{\nu=0}^{n} b_{i,\nu}X^m=0\qquad(i=1,\ldots,r)$$

の完全交叉は、係数 $b_{i,\nu}$ が *general* なら単有理である。

Theorem 1 は general な完全交叉に対してしか適用できないので Theorem 2 を Theorem 1 から直接導くことはできない。残念なことに我々の証明法では、条件を $n\geq r^2+2r$ から $n\geq r^2+3r$ に強める必要がある。

実際のところもう少し精密な結果がある。以下、k は必ずしも代数的に閉であるとは限らない標数 $p>0$ の体とする。$\mathbb{P}_k^n$ の k 上定義された r 次元部分線形空間 L をひとつ固定する。$\mathcal{F}_L$ により (1) の形の式で定義され、かつ L を含む超曲面全体のなす variety とする。$\mathcal{F}_L$ は k 上定義された $(n+1)^2-(r+1)^2-1$ 次元射影空間と同型になる。

Theorem 3. $n \geq r^2+r+1$ とする。このとき、$\mathcal{F}_L$ の r 個の直積 $\mathcal{F}_L \times \cdots \times \mathcal{F}_L$ の *open dense subset* U で次の性質を持つものが存在する。K/k を任意の体の拡大とする。U の K*-valued point* に対応する r 個の超曲面 $V_1,\ldots,V_r$ の完全交叉 $W = V_1 \cap \cdots \cap V_r$ に対して、K^{1/q^r} 上定義された *purely inseparable* な *degree* $q^{r(r+1)/2}$ の *dominant rational map* $\mathbb{P}^{n-r} \cdot\cdot \to W$ が存在する。

定理 1 は定理 3 と次の簡単な補題から導かれる。

Lemma. k は代数閉体であるとする。$n \geq r^2+2r$ ならば、任意の $V_1,\ldots,V_r \in \mathcal{F}$ に対して、$W = V_1 \cap \cdots \cap V_r$ に含まれる r 次元部分線形空間が存在する。

3. Outline of the proof of Theorem 3.

証明は r についての帰納法による。

一般に体 E 上定義された m 次元多様体 M に対して、E の拡大体 F 上定義された dominant rational map $\mathbb{P}^m \cdot\cdot \to M$ が存在する (つまり F 上単有理である) ということは、$M_F := M \times_{\mathrm{Spec}E} \mathrm{Spec}F$ の函数体 $F(M)$ が F 上 purely transcendental な体 $F(t_1,\ldots,t_m)$ に含まれるということと同値である。

特に M_F が F 上定義されたある有理多様体 N 上の fiber space としての構造をもっている時には、その generic fiber の $F(N)$ 上の単有理性は M の F 上の単有理性を imply することに注意する。

超曲面

$$V = \{ \sum_{\mu,\nu=0}^{n} a_{\mu\nu} X_\mu X_\nu{}^q = 0 \}$$

上の点 $Q=(Y_0,\ldots,Y_n)$ における V の接平面 $T_{Q,V}$ は、

$$\sum_{\mu=0}^{n} (\sum_{\nu=0}^{n} a_{\mu\nu} Y_\nu{}^q) X_\mu = 0$$

によりあたえられる。したがって、$\mathbb{P}^n$ の点 $R=(Z_0,\ldots,Z_n)$ についての V の polar divisor $\{Q \in V\ ;\ T_{Q,V} \ni R\}$ は、超平面

$$P_{R,V} = \{ \sum_{\nu=0}^{n} (\sum_{\mu=0}^{n} a_{\mu\nu} Z_\mu)^{1/q} X_\nu = 0 \}$$

による V の超平面切断の q-multiple になる。いま、$V_i \in \mathcal{F}_L(K)$ $(i=1,\dots,r)$ を "general" にとる。(ここで "general" とは、これから述べる議論がうまくいくためのいくつかの open conditions を満足しているということである。)

$$W = V_1 \cap \cdots \cap V_r,$$
$$T_{L,W} = \{(Q,R) \in L \times \mathbb{P}^n \ ; \ T_{Q,W} = T_{Q,V_1} \cap \cdots \cap T_{Q,V_r} \ni R\}$$

とおくと、任意の R に対して $\phi^{-1}(R) = L \cap P_{R,V_1} \cap \cdots \cap P_{R,V_r} \neq \emptyset$ であるから、the second projection $\phi : T_{L,W} \to \mathbb{P}^n$ は全射になる。より詳しく、degree q^r の purely inseparable morphism であることがわかる。(実際 general な R に対して $\phi^{-1}(R)$ は set theoretical には 1 点からなるので ϕ は purely inseparable である。) したがって、$\phi^{-1}(W)$ の K^{1/q^r} 上での単有理性をいえばよい。いま $Q \in L$ として the generic point の q-th root

$$\mathrm{Spec}K(L)^{1/q} \to L$$

をとり、the first projection $\phi^{-1}(W) \to L$ の Q 上の fibre

$$Z := \phi^{-1}(W) \times_L \mathrm{Spec}K(L)^{1/q}$$

を考える。$K' := K(L)^{1/q}$ とおく。$\phi^{-1}(W)$ の K^{1/q^r} 上の単有理性をいうためには、Z が $(K')^{1/q^{r-1}}$ 上で単有理であることをいえばよい。なぜなら $(K')^{1/q^{r-1}}$ は K^{1/q^r} 上の purely transcendental な体だからである。($\dim W = \dim \phi^{-1}(W) = n-r$, $\dim Z = n-2r$, $\mathrm{trans.deg}_{K^{1/q^r}}(K')^{1/q^{r-1}} = r$ であることに注意。)

Z は K' 上定義された $(n-r)$ 次元射影空間と同型な $T_{Q,W}$ のなかの r 個の超曲面 $T_{Q,W} \cap V_i$ $(i=1,\dots,r)$ の完全交叉になる。$(x_1,\dots,x_{n-r})$ を $T_{Q,W}$ の Q を原点とする affine 座標系とする。各 $T_{Q,W} \cap V_i$ は原点 Q に特異点をもつからその定義方程式の 0 次および 1 次の項はなくなる。V_i の定義方程式が (1) の形をしていること、および K' が $K(L)$ の元の q 乗根をすべて含むことから、$T_{Q,W} \cap V_i$ は

(2) $\quad f_i(x)^q + h_i(x) = 0$ $\quad$ (ここで f_i は 1 次同次式, h_i は (1) の形をした q 次同次式)

なる形の方程式により定義されることがわかる。したがって、Q を通る十分 general な $T_{Q,W}$ の line は 各 $T_{Q,W} \cap V_i$ と Q において重複度 q で交わりそこ以外では 1 つしか交点をもたない。いま D により Q を通る $T_{Q,W}$ の lines 全体のなす variety をあらわし、$\pi : T_{Q,W} \cdots \to D$ を自然な projection とする。D は K' 上定義された $(n-r-1)$ 次元射影空間と同型になり、$(x_1,\dots,x_{n-r})$ はその同次座標系とみなすことができる。π により、Z は D 内で

$$\frac{h_1(x)}{f_1(x)^q} = \cdots = \frac{h_r(x)}{f_r(x)^q}$$

により定義された variety Y に birational にうつされる。この Y は、$r-1$ 個の $(2q-1)$ 次超曲面

(3) $$U_i := \{f_i^q h_r - f_r^q h_i = 0\} \quad (i=1,\dots,r-1)$$

の完全交叉になっている。

G により、D の $(n-2r-1)$ 次元部分線形空間 $\{f_1 = \cdots = f_r = 0\}$ を含む $(n-2r)$ 次元部分線形空間全体のなす多様体をあらわし、$H \subset G \times D$ により、the universal family をあらわす。G は K' 上定義された $(r-1)$ 次元射影空間と同型になり、また the second projection $pr_2 : H \to D$ は $\{f_1 = \cdots = f_r = 0\}$ を中心とする blowing up になっている。式 (3) からわかるように、各 U_i の total transform $pr_2^{-1}(U_i)$ は the exceptional divisor E の q-multiple 含み、

$$\tilde{V}_i^{(1)} := pr_2^{-1}(U_i) - qE$$

が U_i の strict transform になっている。ここで、 the first projection $pr_1 : \tilde{V}_i^{(1)} \to G$ の generic fiber

$$V_i^{(1)} := \tilde{V}_i^{(1)} \times_G K'(G)$$

を考えよう。各 h_i が (1) の形をした $(q+1)$ 次同次式であることからわかるように、$V_i^{(1)}$ は G の函数体 $K^{(1)} := K'(G)$ 上定義された $(n-2r)$ 次元の射影空間において (1) の形の方程式により定義された超曲面になる。つまり各 $V_i^{(1)}$ は $K^{(1)}$ の代数閉体上 $(n-2r-1)$ 次元の $(q+1)$ 次 Fermat 超曲面と射影同型である。しかも各 $V_i^{(1)}$ は L からくる $K^{(1)}$ 上定義された $(r-1)$ 次元部分線型空間 $L^{(1)}$ を含む。

$$W^{(1)} := V_1^{(1)} \cap \cdots \cap V_{r-1}^{(1)}$$

とおく。$W^{(1)}$ は Y の strict transform の G 上の generic fiber である。Y と Z は K' 上 birational であるから、$W^{(1)}$ と Z は同じ函数体をもつ。($\dim Z = n-r$, $\dim W^{(1)} = n-2r+1$, $\text{trans.deg}_{K'} K^{(1)} = r-1$ であることに注意。)

$W^{(1)}$ は $n_1 = n-2r$ 次元の射影空間のなかの $r_1 = r-1$ 個の超曲面の完全交叉だから条件 $n_1 \geq r_1^2 + r_1 + 1$ は再びみたされている。よって帰納法の仮定により、$W^{(1)}$ は $(K^{(1)})^{1/q^{r-1}}$ 上単有理になる。G は有理多様体だから、$(K^{(1)})^{1/q^{r-1}}$ は $(K')^{1/q^{r-1}}$ 上 purely transcendental である。したがって、Z は $(K')^{1/q^{r-1}}$ 上単有理になる。証明おわり。

4. Problems.

1. 上記の定理において、$V_1, \ldots, V_r$ を general にとらなくてはいけないという条件はどこまで正確に記述できるであろうか？

例えば、$V_1, \ldots, V_r \in \mathcal{F}_L(\bar{k})$ で完全交叉 $W = V_1 \cap \cdots \cap V_r$ は非特異ではあるが単有理ではないというものが存在するであろうか?

2. $V_1, \ldots, V_r \in \mathcal{F}(\bar{k})$ に対して $W = V_1 \cap \cdots \cap V_r$ は supersingular であろうか？

References

[B] A. Beauville, Sur les hypersurfaces dont les sections hyperplanes sont à module constant, The Grothendieck Festschrift (P. Cartier et al. eds), Volume III, Birkhäuser, Boston, Basel, Berlin, 1990, pp. 121–133.

[Sch] C. Schoen, unpublished.

[Sh] T. Shioda, An example of unirational surfaces in characteristic p, Math. Ann. **211** (1974), 233–236.

[Sh-K] T. Shioda and T. Katsura, On Fermat varieties, Tôhoku Math. J. **31** (1979) 97–115.

[T] J. Tate, Algebraic cycles and poles of zeta functions, Arithmetical Algebraic Geometry (O. F. G. Schilling, ed), Harper and Row, New York, 1965, pp. 93–110.